Intersection de droites et de plans

d est une droite de l'espace passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$.

On appelle représentation paramétrique de d , le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

D une droite passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$

et d une droite passant par $B(x_B,y_B,z_B)$ de vecteur directeur $\vec{v}(d,e,f)$.

– D et d sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

– D et d sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires

– D et d sont sécantes si et seulement si le système

$\begin{cases} x_A + ta = x_B + t'd \\ y_A + tb = y_B + t'e \\ z_A + tc = z_B + t'f \end{cases}$ aux inconnues t et t', admet une solution unique

– D et d sont non coplanaires si et seulement si D et d ne sont ni sécantes , ni parallèles .

D une droite passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$.

P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

– D est parallèle à P $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux .

– D et P sont sécants en un point si et seulement si le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

aux inconnues x,y,z,t admet une solution unique

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

et P' un plan d'équation cartésienne $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

– P et P' sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n'}(a',b',c')$ sont colinéaires .

– Lorsque P et P' sont sécants , leur intersection est une droite D .

$M(x,y,z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

On transforme le système en une représentation paramétrique de D
en posant z = t , puis en exprimant x , puis y en fonction de t .

Position relative de 3 plans

Premier cas : deux plans par exemple , P et P' sont strictement parallèles

1) P'' est parallèle à P et P' , alors les 3 plans n'ont aucun point en commun

2) P'' est sécant à P et P' selon deux droites strictement parallèles

Deuxième cas : Les 3 plans sont 2 à 2 sécants , P et P' selon la droite Δ

1) P'' est strictement parallèle à Δ , alors les 3 plans n'ont aucun point en commun
et les 3 droites d'intersection des plans 2 à 2 , sont strictement parallèles

2) Δ coupe P'' en I , alors I est l'unique point commun aux 3 plans

3) Δ est incluse dans P'' , alors la droite Δ est l'intersection des 3 plans

.

§ On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien , chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace .L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 km . Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol .
Les deux routes aériennes à contrôler sont les droites d_1 et d_2 d'équations paramétriques

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \\ z = 2 \end{cases} , a \in 3 \qquad d_2 : \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} , b \in 3$$

1. a. Indiquer des vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des droites d_1 et d_2 .
   b. Prouver que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires .

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle , de coordonnées (3 ; 4 ; 0,1) , un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite nommée Δ .
   On nomme P_1 le plan contenant le point S et la droite d_1 , et P_2 le plan contenant S et d_2 .
   a. Prouver que d_2 et P_1 sont sécants
   b. Prouver que d_1 et P_2 sont sécants
   c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de Δ pour que cette droite coupe d_1 et d_2 . Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse .

§ Dans un repère orthonormal , le plan P a pour équation $5x + y - z + 3 = 0$

et la droite d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

a. Déterminer un vecteur normal de P et un vecteur directeur de d
b. Etudier l'intersection de P et d .

§ Soient les plans d'équations $2x - y + 3z - 1 = 0$ et $x + y - 4z - 6 = 0$
a. Montrer qu'ils sont sécants
b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d intersection des deux plans
c. En déduire un point et un vecteur directeur de d

§ étudier l'intersection des 3 plans dans chacun des cas :

1. P : $x + y - 2 = 0$ Q : $y + z - 2 = 0$ R : $x + z - 2 = 0$

2. P : $x + y - 2 = 0$ Q : $y + z - 2 = 0$ R : $x + 2y + z - 4 = 0$

3. P : $x + y + z - 6 = 0$ Q : $x - y + z - 2 = 0$ R : $x + y - z - 4 = 0$

4. P : $2x - 3y + 4z - 9 = 0$ Q : $-3x + 4y + 2z - 12 = 0$ R : $4x + 2y - 3z - 10 = 0$

5. P : $2x + 3y - 5z - 2 = 0$ Q : $4x - 3y + 2z - 7 = 0$ R : $x + 5y - 3z + 8 = 0$

6. P : $x + y + z - 6 = 0$ Q : $x + 4y - z = 0$ R : $x + 2y - z - 4 = 0$

7. P : $x - 2y - z + 2 = 0$ Q : $-3x + 4y + 2z - 12 = 0$ R: $4x + 2y - 3z - 10 = 0$