exercice 1

a) $\dfrac{x^2-3x+5}{4x-2} = \dfrac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x\left(4-\dfrac{2}{x}\right)} = x\ \dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{4-\dfrac{2}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{4x-2} = +\infty$

b) $\dfrac{3^n-4^n}{3^n+5^n} = \dfrac{4^n\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-1\right)}{5^n\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1\right)} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\dfrac{\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-1\right)}{\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1\right)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-4^n}{3^n+5^n}=0$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$ donc $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-6}{(x-2)^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 0}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

e) $\dfrac{2x^2+5x+4}{x+1}-(2x+3) = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+1}-\dfrac{(2x+3)(x+1)}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x+4}{x+1}-(2x+3)=0$

exercice 2

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$

3) a) $2-\dfrac{5}{u_n+4} = \dfrac{2u_n+8-5}{u_n+4} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$

b) Soit P(n) : "$0\le u_n\le 1$"

P(0) est vraie. Supposons que pour un certain entier $n\ge0$, $0\le u_n\le1$

alors $4\le u_n+4\le5$, donc $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{u_n+4}\le\dfrac{1}{4}$, donc $-\dfrac{5}{4}\le-\dfrac{5}{u_n+4}\le-1$

enfin , $2-\dfrac{5}{4}\le2-\dfrac{5}{u_n+4}\le2-1$, soit $0\le\dfrac{3}{4}\le u_{n+1}\le1$

Et la propriété est vraie au rang n+1

c) $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - -u_n = \dfrac{2u_n+3-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4}$

$\dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4} = \dfrac{u_n+3-u_n^2-3u_n}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4}$

donc $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}$

De l'encadrement $0\le u_n\le1$, on déduit $1-u_n\ge0$, $u_n+3\ge0$ et $u_n+4\ge0$

donc $u_{n+1}\ge u_n$ et la suite (u_n) est croissante

4) On pose pour tout entier naturel n , $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \dfrac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12}$

$= \dfrac{u_n-1}{5u_n+15} = \dfrac{1}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+3} = \dfrac{1}{5}v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$

b) $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+3}=-\dfrac{1}{3}$, donc $v_n=-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = -\dfrac{1}{3\times5^n}$

c) $\lim v_n=0$ car $\dfrac{1}{5}\in\ ]-1;+1[$

5) a) De $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$, on déduit $v_nu_n+3v_n=u_n-1$

donc $u_nv_n-u_n=-1-3v_n$

$u_n(v_n-1)=-1-3v_n$

et $u_n = \dfrac{-1-3v_n}{v_n-1} = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n}$

b) $\lim v_n=0$, donc $\lim u_n=1$

c) $u_n=\dfrac{1+3v_n}{1-v_n} = \dfrac{1-\dfrac{1}{5^n}}{1+\dfrac{1}{3\times5^n}} = \dfrac{3\times5^n-3}{3\times5^n+1}$