**correction ex 1**

**partie A**

f est la fonction définie sur 3 \ {–2} par $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x + 2}$

1. a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

   b. La droite d'équation x = 2

2. $f\,'(x) = \dfrac{-2x(x+2) - (1 - x^2)}{(x+2)^2} = \dfrac{-2x^2 - 4x - 1 + x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2 - 4x - 1}{(x+2)^2} = -\dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

   le numérateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$ et pour racines $\begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$

| x | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{3}$ | | $-2$ | | $-2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | $-$ | 0 | $+$ | \|\| | $+$ | 0 | $-$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | | ↘ | $-\infty$ |

3. $f(x) - (-x + 2) = \dfrac{1 - x^2}{x + 2} + x - 2 = \dfrac{1 - x^2 + x^2 - 4}{x + 2} = -\dfrac{3}{x + 2}$

   donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$

4. a. Soit $h \neq 0$ . $f(-2 + h) = \dfrac{1 - (-2 + h)^2}{h} = \dfrac{1 - (4 - 4h + h^2)}{h} = \dfrac{-h^2 + 4h - 3}{h}$

   $f(-2 - h) = \dfrac{-h^2 - 4h - 3}{-h} = \dfrac{h^2 + 4h + 3}{h}$

   donc $f(-2 + h) + f(-2 - h) = \dfrac{8h}{h} = 8$ .

   b. Pour tout $h \neq 0$ , $-2 + h$ et $-2 - h \in D_f$ et $\dfrac{f(-2 + h) + f(-2 - h)}{2} = 4$

   donc la courbe représentative de f admet A(–2;4) comme centre de symétrie .

**partie B**

Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = f(\sin x) = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x + 2}$

1. Pour tout x réel , $-1 < \sin x < 1$ , donc $1 < \sin x + 2 < 3$ , donc $D_\psi = 3$ .
2. $\psi(x + 2\pi) = f(\sin(x + 2\pi)) = f(\sin x) = \psi(x)$
3. Soit $h \in 3$ , $\psi(\frac{\pi}{2} + h) = \dfrac{1 - \sin^2(\frac{\pi}{2} + h)}{\sin(\frac{\pi}{2} + h) + 2} = \dfrac{1 - \cos^2 h}{\cos h + 2}$

$$\psi(\frac{\pi}{2} - h) = \frac{1 - \cos^2(-h)}{\cos(-h) + 2} = \frac{1 - \cos^2 h}{\cos h + 2} = \psi(\frac{\pi}{2} + h)$$

donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe .

4. a.

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| sin x | $-1$ | ↗ | $+1$ |

b. La fonction sinus est continue , strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

et $-2 + \sqrt{3} \in [-1;1]$ .

donc l'équation $\sin x = -2 + \sqrt{3}$ admet une solution unique α sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c.

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | | α | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin x<br>X | $-1$ | ↗ | $-2 + \sqrt{3}$ | ↗ | $1$ |

| X | $-1$ | | $-2 + \sqrt{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(X) | $0$ | ↗ | | ↘ | $0$ |

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | | α | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ψ(x) | $0$ | ↗ | | ↘ | $0$ |

**correction ex 2**

1) Soit $\theta = \widehat{POA}$ ;

a) OAP est un triangle isocèle de sommet O. La bissectrice de l'angle $\widehat{POA}$ coupe [AP] en son milieu O'. Dans le triangle rectangle AOO' , on a $\sin \widehat{AOO'} = \dfrac{AO'}{AO}$ ,

donc $AO' = \sin \dfrac{\theta}{2}$ et $AP = 2AO' = 2 \sin \dfrac{\theta}{2}$

b) aire commune = 2[aire(secteur OPA) + aire(secteur PAJ) – aire(triangle OPA)]

L'aire d'un secteur angulaire d'angle θ et de rayon R est $\dfrac{R^2\theta}{2}$ .

aire(secteur OPA) $= OA^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$

aire(secteur PAJ) $= AP^2\,\dfrac{\text{mesure}\widehat{APJ}}{2} = 4 \sin^2 \dfrac{\theta}{2} \times \dfrac{\frac{\pi-\theta}{2}}{2} = (\pi - \theta) \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$

aire(triangle OPA) $= \dfrac{\text{hauteur issue de A} \times OP}{2} = \dfrac{OA \times \sin\theta \times OP}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

donc aire commune $= 2(\dfrac{\theta}{2} + (\pi - \theta)\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\theta) = \theta + 2(\pi-\theta)\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \sin\theta$

c) On veut que l'aire commune soit égale à $\dfrac{\pi}{2}$ d'où l'équation que doit vérifier θ

$\theta + 2(\pi - \theta)\sin^2\dfrac{\theta}{2} - \sin\theta = \dfrac{\pi}{2}$

d) On pose $x = \pi - \theta$ avec $\theta \in [0;\pi]$ , donc $x \in [0;\pi]$

l'équation devient $\pi - x + 2x\sin^2(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}) - \sin(\pi - x) = \dfrac{\pi}{2}$

$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos x + 1}{2}$ donc $2x\sin^2(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}) = x\cos x + x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

donc l'équation s'écrit $\pi - x + x\cos x + x - \sin x = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\sin x - x\cos x = \dfrac{\pi}{2}$

$AP = 2\sin\dfrac{\theta}{2} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = 2\cos\dfrac{x}{2}$

2) Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \sin x - x\cos x - \dfrac{\pi}{2}$

a) $f'(x) = x\sin x$ , donc $f' > 0$ sur $]0;\pi[$ , et f est continue et strictement croissante sur $[0;\pi]$

$f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $f(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$ , donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;\pi]$

b) $\alpha \approx 1{,}905$

c) $AP \approx 1{,}16$