

Asymptotes à une courbe représentative d'une fonction

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à C_f

exemple 1 :

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+2}{x-3}$, déterminer une asymptote verticale de C_f

Indications

- calculer la limite de f en 3^+ et 3^-
- conclure

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à C_f

exemple 2 :

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+2}{x-3}$, déterminer une asymptote horizontale de C_f

Indications

- factoriser le numérateur et le dénominateur par x
- simplifier la fraction
- calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$
- conclure

On peut rechercher des asymptotes obliques lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f

exemple 3 (on donne l'équation de la droite dans l'énoncé)

Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 1}{x - 3}$

Montrer que la droite d'équation $y = x + 8$ est asymptote à la courbe

Indications

- calculer $f(x) - (x + 8)$ sous la forme d'une fraction de dénominateur $x - 3$
- factoriser le numérateur et le dénominateur par x et simplifier la fraction
- en déduire la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x + 8)$
- conclure

Si on ne donne pas l'équation de la droite , on tente de déterminer deux réels a et b et une fonction h tels que $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$.

La droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote à la courbe

exemple 3

f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 5}$

- montrer que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 5}$ avec des réels a,b et c que l'on déterminera
- en déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et $-\infty$

exemple 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Déterminer le réel a tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
 - Déterminer le réel b tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$
 - En déduire l'équation d'une asymptote (D) à la courbe (C) en $+\infty$.
- De même , déterminer l'équation d'une asymptote (D') à la courbe de (C) en $-\infty$.