Question ROC sur les suites monotones

Théorème
Si une suite est croissante et non majorée , alors elle a pour limite $+\infty$.

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée
Soit A un réel . (u_n) n'est pas majorée , donc il existe un entier N / $u_N > A$
(u_n) est croissante , donc pour tout $n > N$, $u_n > A$, soit $u_n \in \;]A ; +\infty[$

Propriété
Si une suite (u_n) est croissante et convergente vers L,
alors pour tout entier n , $u_n \leq L$

Supposons qu'il existe un rang N tel que $u_N > L$.
Comme la suite est croissante , pour $n > N$, $u_n \geq u_N$
$]-\infty;u_N[$ est un intervalle ouvert qui contient L donc qui contient tous les u_n pour $n > N'$
Pour $n > \max(N,N')$, $u_N \leq u_n < u_N$ ce qui est impossible .

Théorème
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante
alors - (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite L
- pour tous entiers naturels p et q , $u_p \leq L \leq v_q$

Soient u et v deux suites adjacentes , avec u croissante et v décroissante .
$v - u$ est une suite décroissante de limite nulle , donc pour tout entier n , $v_n - u_n \geq 0$.
soit pour tout entier n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
La suite u est croissante et majorée par v_0 , donc elle converge vers un réel L
La suite v est décroissante et minorée par u_0 , donc elle converge vers un réel L'
$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc $L' - L = 0$, donc $L = L'$.
(u_n) est croissante de limite L , donc pour tout entier p , $u_p \leq L$.
(v_n) est décroissante de limite L , donc pour tout entier q , $L \leq v_q$

Exemples de questions ROC posées

Liban 2008

Prérequis : une suite tend vers $+\infty$, si pour tout réel A, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

Démontrer que : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Métropole 2005

On suppose connus les résultats suivants

- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque
  - l'une est croissante
  - l'autre est décroissante
  - $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$
- Toute suite croissante et majorée est convergente
  Toute suite décroissante et minorée est convergente

Démontrer que : Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont même limite.