Questions ROC sur la dérivabilité des fonctions

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_0 est un réel de I
Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

démonstration

Soit x_0 et $x \in I$. $f(x) = (x - x_0) \times \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, donc que f est continue en x_0 .

Théorème

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g est une fonction dérivable sur un intervalle J telles que pour tout x de I , $u(x) \in J$
Alors la fonction composée g o u est dérivable sur I et pour tout x de I
$(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$

démonstration

Soit x_0 et $x \in I$, $\dfrac{g \circ u(x) - g \circ u(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$

u est dérivable en x_0 , donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$

u est continue en x_0 , donc $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$

$u(x_0) \in I$, donc g est dérivable en $u(x_0)$, donc $\lim\limits_{X \to u(x_0)} \dfrac{g(X) - g(u(x_0))}{X - u(x_0)} = g'(u(x_0))$

D'après le théorème de composée sur les limites , $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} = g'(u(x_0))$

On en déduit que g o u est dérivable en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g \circ u(x) - g \circ u(x_0)}{x - x_0} = g'(u(x_0)) \times u'(x_0)$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors pour tout entier naturel $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

démonstration

$u^n = g \circ u$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(X)= X^n$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(X) = nX^{n-1}$, donc $g \circ u = u^n$ est dérivable sur I

et pour tout x de I , $(u^n)'(x) = g'[u(x)]u'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I ,
alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

démonstration

$\sqrt{u} = g \circ u$ où g est la fonction racine carrée , g dérivable sur]0 ; +∞[et $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$

De plus pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ donc la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et pour tout x de I

$(\sqrt{u})'(x) = g'[u(x)]u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x)$