Fiche 028 – distance d'un point à un plan

Soit (P) le plan d'équation $x - 2y + 3z - 1 = 0$ et $A(2;-1;3)$. Calculer la distance de A à (P)

On appelle distance d'un point A à un plan , la distance minimale entre A et un point du plan. C'est la distance entre A et le projeté orthogonal de A sur le plan .

Soit $H(x;y;z)$ le projeté orthogonal de A sur (P) : $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal de (P) , donc colinéaire à $\overrightarrow{n}(1;-2;3)$, donc $\overrightarrow{AH} = t\,\overrightarrow{n}$, donc $\begin{cases} x - 2 = t \\ y + 1 = -2t \\ z - 3 = 3t \end{cases}$, donc $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

H appartient au plan donc $x - 2y + 3z - 1 = 0$, donc $2 + t - 2(-1 - 2t) + 3(3 + 3t) - 1 = 0$

donc $12 + 14t = 0$ et $t = -\dfrac{6}{7}$

donc $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{6}{7} ; \dfrac{12}{7} ; -\dfrac{18}{7}\right)$, donc $AH^2 = \dfrac{6^2 + 12^2 + 18^2}{7^2} = \dfrac{504}{49}$

donc $d(A,(P)) = \dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

$$\mathbf{d(A,(P)) = \dfrac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}}$$ **avec $\overrightarrow{n}$ vecteur normal de (P) et B un point quelconque (P)**

$B(1;0;0)$ appartient au plan (P) car ses coordonnées vérifient l'équation de (P)

$\overrightarrow{AB}(-1;1;-3)$, $\overrightarrow{n}(1;-2;3)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -1 - 2 - 9 = -12$

donc $d(A,(P)) = \dfrac{12}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} = \dfrac{12\sqrt{14}}{14} = \dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

$$\mathbf{d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$ **où $ax + by + cz + d = 0$ est une équation de (P)**

$$d(A,(P)) = \dfrac{|x_A - 2y_A + 3z_A - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \dfrac{|2 - 2\times(-1) + 3\times 3 - 1|}{\sqrt{14}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} = \dfrac{6\sqrt{14}}{7}$$

Exercice

$A(1;-1;2)$ $B(0;-1;3)$, $C(2;-3;1)$ et $D(-1;-3;0)$

Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

Les méthodes 2 ou 3 sont les plus rapides

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC)