exercice 2

Partie I

1. $1 + xe^{-x} = 1 + \frac{x}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + xe^{-x} = 1$

   la fonction ln est continue en 1 , donc $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$

   D'après le théorème des limites de fonctions composées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = 0$

2. $f'(x) = \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{1 + xe^{-x}} = (1 - x)\frac{e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$ et $\frac{e^{-x}}{1 + xe^{-x}} > 0$ sur $[0;+\infty[$

   donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ sur $[0;+\infty[$

3.

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	$\ln(1 + 1/e)$	↘	0

Partie II

1a. C'est l'aire en u.a. du domaine ensemble des points M(x;y) tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

1b. Pour tout $x \in [0;\lambda]$, $0 \leq f(x) \leq f(1)$ d'après le tableau de variation de la partie I

   donc $0 \leq A(\lambda) \leq \int_0^\lambda f(1)\,dx = \lambda \times f(1)$

2a. $\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda - [e^{-x}]_0^\lambda = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$

 b. pour tout $x \geq 0$, donc pour tout x de $[0;\lambda]$, $f(x) = \ln(1 + xe^{-x}) \leq xe^{-x}$

   donc $A(\lambda) \leq \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$

3. avec la première méthode , $5f(1) \approx 1{,}57$
   avec la deuxième méthode , $1 - 5e^{-5} - e^{-5} = 0{,}96$
   C'est la deuxième méthode qui donne le meilleur majorant