Terminale S2	Mathématiques	DM 03 à rendre le lundi 9 novembre 2009

Pour les graphiques et les calculs, on pourra utiliser geogebra , un tableur et rendre des feuilles imprimées.

exercice 1

partie A

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x + 2}$

1. a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .
   b. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe (C) représentative de f .
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f
3. Justifier que la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe (C) .
4. a. Soit $h \neq 0$. Calculer $f(-2 + h) + f(-2 - h)$.
   b. Que peut-on en déduire ?

partie B

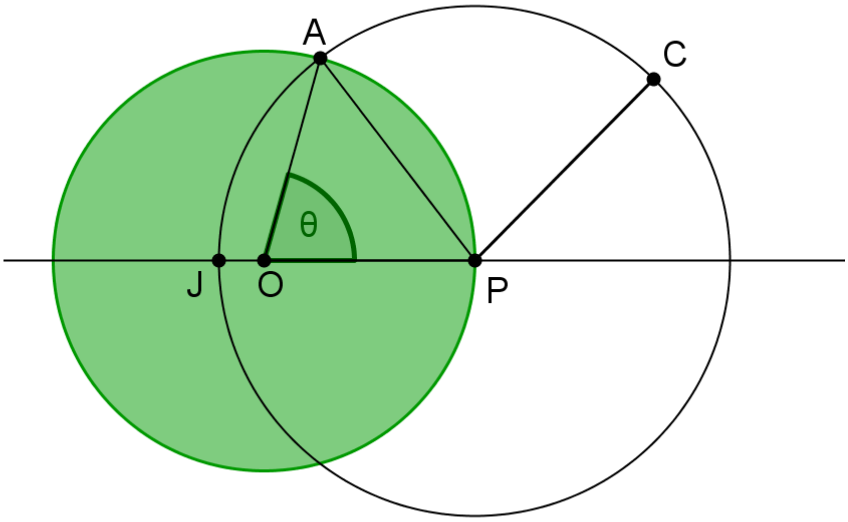
Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = f(\sin x) = \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x + 2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ψ .
2. Montrer que ψ est périodique de période 2π .
3. Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe Γ représentative de la fonction ψ .
4. a. Rappeler les variations de $x \to \sin x$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   b. Montrer que l'équation $\sin x = -2 + \sqrt{3}$ admet une solution unique α sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   c. A l'aide des variations des fonctions composées , ou de la dérivée d'une fonction composée , déduire les variations de ψ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   d. Tracer la courbe représentative de ψ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis compléter sur $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

exercice 2

Une chèvre est attachée à un piquet sur la périphérie d'un champs circulaire .
Quelle longueur de corde doit-on lui laisser pour qu'elle puisse avoir accès à la moitié de la surface du champs ?

Modélisation



Le disque coloré de centre O et de rayon 1 représente le pré. Son aire est donc π
P représente le piquet et C la chèvre . Le disque de centre P passant C représente la zone que la chèvre peut atteindre . Le but du problème est de déterminer la longueur du rayon PC pour que l'intersection des deux disques ait une aire égale à $\frac{\pi}{2}$.

On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire d'angle θ et de rayon R est $\frac{R^2\theta}{2}$.

1) On pose $\theta = \widehat{POA}$ avec $\theta \in [0;\pi]$ où A est un point d'intersection des deux cercles .

a) Montrer que $AP = 2\sin\frac{\theta}{2}$.
b) Calculer l'aire de la zone commune aux deux disques en fonction de θ .
c) En déduire que θ vérifie : $\theta + 2(\pi - \theta)\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\theta = \frac{\pi}{2}$.
d) On pose $x = \pi - \theta$: montrer que $x \in [0;\pi]$ et vérifie $\sin x - x\cos x = \frac{\pi}{2}$.

   Exprimer AP en fonction de x .

2) On pose $f(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;\pi]$.
b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α .
c) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de AP.