TS2	mathématiques DS 01 (1 h)	5 octobre 2009

Question ROC (2 points)

prérequis : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L ,
contient tous les réels f(x) pour x assez grand

Soient f,g,h sont des fonctions définies sur un intervalle I = [a;+∞[

Montrer que si $\begin{cases} g \leq f \leq h \text{ sur } I \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Questions de cours : (2 points)

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison r . Donner une expression de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

2) (u_n) est une suite géométrique de raison q. Donner une expression de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

exercice 1 (6 points)

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{4x - 2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 5^n}$

c) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{(x-2)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

e) Montrer que la droite d'équation y = 2x + 3 est asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \to \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1}$

exercice 2 (10 points)

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1) Sans calculs représenter sur le dessin en annexe les 3 premiers termes (u_0,u_1,u_2) de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2) Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite
3) a) Vérifier que $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n + 4}$
   b) En déduire par une démonstration par récurrence que pour tout naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$
   c) En déduire le sens de variation de (u_n) après avoir vérifié que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n + 4}$
4) On pose pour tout entier naturel n , $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n)
5) a) Exprimer u_n en fonction de v_n
   b) En déduire la limite de la suite (u_n)
   c) Exprimer u_n en fonction de n

Annexe à rendre : **Nom**

La droite a pour équation y = x

La courbe représente la fonction $f : x \rightarrow \frac{2x + 3}{x + 4}$