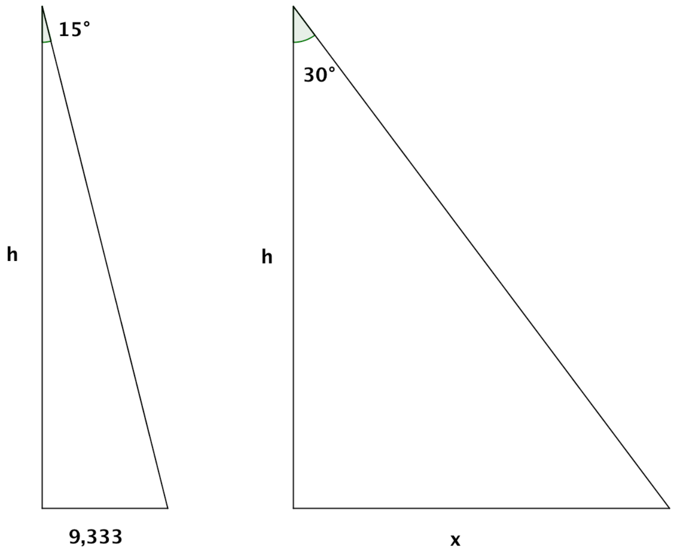
# Correction du rallye de Bourgogne 2011

**exercice 1**

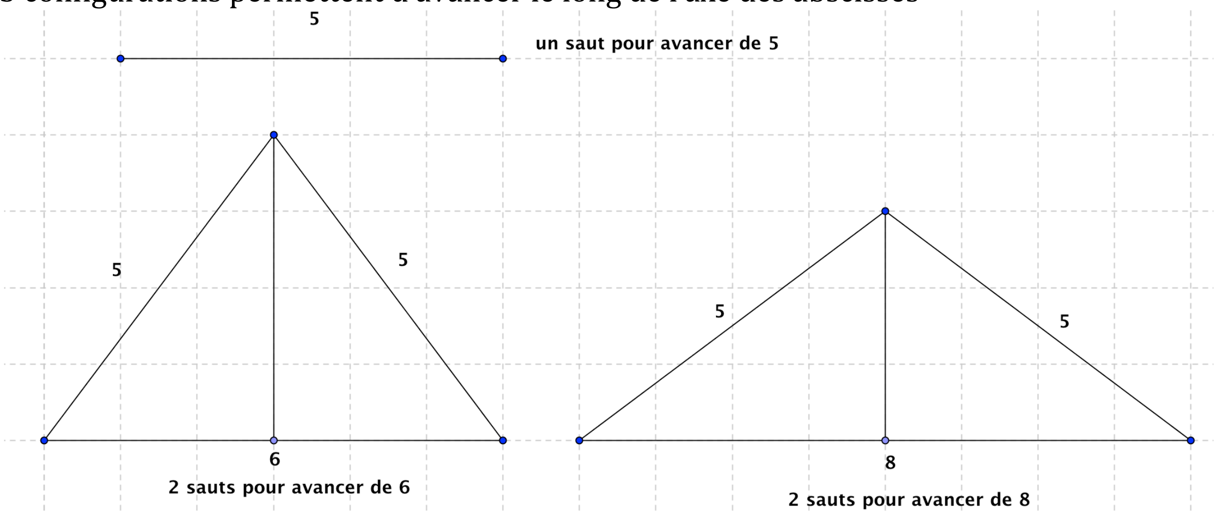
Toutes les heures , la terre fait une rotation sur son axe de 15°. (360/24 = 15)
En supposant les rayons du soleil parallèles et en appelant h la hauteur du pylône, on obtient les dessins suivants




Donc $\tan 15° = \dfrac{9,333}{h}$ et $\tan 30° = \dfrac{x}{h}$ donc $x = 9,333 \times \dfrac{\tan 30°}{\tan 15°} \approx 20,11$ m = 2011 cm

**exercice 2**

3 configurations permettent d'avancer le long de l'axe des abscisses




On utilise le triangle rectangle usuel de côtés 3-4-5
Si on utilise x fois la première configuration, y fois la deuxième et z fois la troisième , on doit avoir 5x + 6y + 8z = 2011 , en prenant x,y,z positifs lorsqu'on se déplace sur l'axe dans le sens positif et négatifs sinon.
x ne peut être pair, sinon la somme 5x + 6y + 8z serait pair et ne pourrait être égal à 2011. x doit être le plus grand possible, car c'est la première configuration qui permet d'avancer le plus vite (5 par sauts contre 3 ou 4 par sauts en moyenne pour les 2 autres)

On cherche des multiples de 5 autour de 2011 , sous la forme 5x avec x impair
x = 401 donne 5x = 2005 , il reste 6 qu'on effectue en 2 sauts avec la configuration 2, ce qui donne en tout 403 sauts.
Donc x ≤ 401 , car x ≥ 403 donnerait un résultat moins bon que celui trouvé.

On cherche s'il peut existe des solutions meilleures en fixant $x \leq 401$
si $x = 401 - 2n$ (k entier $\geq 0$) , il manque $2011 - 5(401 - 2n) = 6 + 10n = 6 + 2n + 8n$
Il faut pour minimiser le nombre de sauts utiliser la configuration 3 au moins n fois, pour obtenir 8n, ce qui correspond à 2n sauts , donc le nombre de sauts nécessaires sera au minimum de $401 - 2n + 2n = 403$, ce qui n'améliore pas la solution trouvée.

**exercice 3**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 9 | ■ |
| 7 | 5 | 6 | 9 |
| 4 | ■ | 1 | 6 |
| 4 | 9 | ■ | 1 |

**exercice 4**
Pour un pneu , on appelle x le nombre de km à l'avant et y à l'arrière.
Un pneu ne peut rouler plus de 60 000 km. Chaque km utilisé à l'avant diminue de 1,5 km l'utilisation possible à l'arrière,

donc $1{,}5x + y \leq 60\,000$ (= si on use le pneu complètement)

On peut étendre ce raisonnement à tous les pneus , ce qui donne

$$1{,}5\,x_1 + y_1 \leq 60\,000$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1{,}5\,x_7 + y_7 \leq 60\,000$$

En ajoutant les 7 inégalités , $1{,}5(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_7) + (y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_7) \leq 420\,000$
Pour pouvoir rouler sur une distance D, la somme des km des pneus utilisés à l'avant doit être égale à la somme des km des pneus utilisés à l'arrières et cette somme est égale à 2D. On compte deux fois la distance car il y a deux pneus avants et deux pneus arrières.
Donc $x_1 + \ldots. + x_7 = y_1 + \ldots.. + y_7 = 2D$ , en remplaçant dans l'inégalité $5D \leq 420\,000$
donc $D \leq 84\,000$.
On ne peut donc faire mieux que 84 000 km. Il suffit donc maintenant de trouver une solution avec 84 000 km.

On peut essayer en imposant à chaque pneu une utilisation complète avec une utilisation équilibrée à l'avant et à l'arrière, ce qui donne l'équation $1{,}5\,x + x = 60\,000$ et $x = 24\,000$.
Pour simplifier les permutations, on va faire des tranches de 12 000 km

| avant | P2 P3 | P1 P2 | P5 P1 | P6 P5 | P7 P6 | P4 P7 | P3 P4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| arrière | P1 P4 | P5 P3 | P6 P2 | P7 P1 | P4 P5 | P3 P6 | P2 P7 |
| non utilisés | P5 P6 P7 | P6 P7 P4 | P7 P4 P3 | P4 P3 P2 | P3 P2 P1 | P2 P1 P5 | P1 P5 P6 |

Chaque pneu est utilisé 2 fois à l'avant et deux fois à l'arrière, soit 24 000 km à l'avant et 24 000 km à l'arrière.
La distance totale est $12\,000 \times 7 = 84\,000$

**exercice 5**

On devait remarquer que pour les 4 premiers mots, les colonnes étaient composées de lettres différentes. Si par exemple, dans le premier mot les 2 premières lettres sont correctement placées, dans le deuxième mot, les deux premières sont mal placées et les deux lettres correctement placées sont parmi les 6 restantes.
De proche en proche , on en déduit que les 8 lettres du prénom sont dans ces 4 mots et donne 4 possibilités pour chaque position.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | E | F | R | O | Q | U | E |
| P | R | E | S | E | N | T | S |
| A | P | P | L | A | U | D | I |
| M | A | I | N | T | E | N | U |

On compare ensuite avec les sept mots suivants et on ne garde que les possibilités pour chaque position

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | | L | E | | U | |
| | | I | S | E | | T | E |
| | R | I | | O | | | E |
| | | | | O | | | |
| | R | | N | | | | |
| P | | | | T | | | |
| | E | F | | | | | |

Dans chaque ligne du dernier tableau , il ne peut y avoir qu'une bonne réponse
Dans la première colonne , seule P reste valable , ce qui élimine T dans la cinquième colonne. Ce qui donne pour les deux tableaux.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | E | F | R | O | Q | U | E |
| **2** | **P** | R | E | S | E | N | T | S |
| **3** | | P | P | L | A | U | D | I |
| **4** | | A | I | N | T | E | N | U |

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | A | | L | E | | U | |
| **2** | | | I | S | E | | T | E |
| **3** | | R | I | | O | | | E |
| **4** | | | | | O | | | |
| **5** | | R | | N | | | | |
| **6** | **P** | | | | | | | |
| **7** | | E | F | | | | | |

Le deuxième tableau montre que O est forcément en 5ème position, c'est la seule possibilité pour que CHOCOLAT ait une lettre correctement placée.
Cela permet d'éliminer les lettres de la cinquième colonne dans les deux tableaux et avec le deuxième tableau la lettre R en 2 , la lettre I en 3 et la lettre E en 8 (3ème ligne)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | E | F | R | O | Q | U | |
| 2 | P | | E | S | | N | T | S |
| 3 | | P | P | L | | U | D | I |
| 4 | | A | | N | | E | N | U |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | L | | | U | |
| 2 | | | | S | | | T | |
| 3 | | | | | O | | | |
| 4 | | | | | O | | | |
| 5 | | | | N | | | | |
| 6 | P | | | | | | | |
| 7 | | E | F | | | | | |

La cinquième ligne du deuxième tableau montre que la lettre correctement placé du mot FRANCHIR est la lettre N en 4.
Ce qui permet d'éliminer les autres lettres de la colonne 4. On obtient les tableaux

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | E | F | | O | Q | U | |
| 2 | P | | E | | | N | T | S |
| 3 | | P | P | | | U | D | I |
| 4 | | A | | N | | E | N | U |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | | | U | |
| 2 | | | | | | | T | |
| 3 | | | | | O | | | |
| 4 | | | | | O | | | |
| 5 | | | | N | | | | |
| 6 | P | | | | | | | |
| 7 | | E | F | | | | | |

La seule lettre correctement placée du mot NOISETTE est donc T. On obtient les tableaux

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | E | F | | O | Q | | |
| 2 | P | | | | | | T | |
| 3 | | P | P | | | U | | I |
| 4 | | A | | N | | E | | U |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | | | | |
| 2 | | | | | | | T | |
| 3 | | | | | O | | | |
| 4 | | | | | O | | | |
| 5 | | | | N | | | | |
| 6 | P | | | | | | | |
| 7 | | E | F | | | | | |

On trouve maintenant A en 2.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | F | | **O** | Q | | |
| **2** | **P** | | | | | | **T** | |
| **3** | | | P | | | U | | I |
| **4** | | **A** | | **N** | | | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | **A** | | | | | | |
| **2** | | | | | | | **T** | |
| **3** | | | | | **O** | | | |
| **4** | | | | | **O** | | | |
| **5** | | | | **N** | | | | |
| **6** | **P** | | | | | | | |
| **7** | | | F | | | | | |

C'est terminé. La ligne 7 du deuxième tableau montre que F est en 3. , donc U est en 6 et il ne reste que I en 8. Ce qui donne comme prénom : **PAFNOUTI**

**exercice 6**

G et D les événements « obtenir une espadrille gauche » et « obtenir une espadrille droite » . On note T l'événement « obtenir une espadrille trouée » et non(T) l'événement contraire.

Les premières probabilités donnent le tableau suivant où n est le nombre d'espadrilles.

| | **G** | **D** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **T** | $\frac{n}{4}$ | $\frac{n}{4}$ | $\frac{n}{2}$ |
| **non(T)** | $\frac{n}{4}$ | $\frac{n}{4}$ | $\frac{n}{2}$ |
| **Total** | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{2}$ | n |

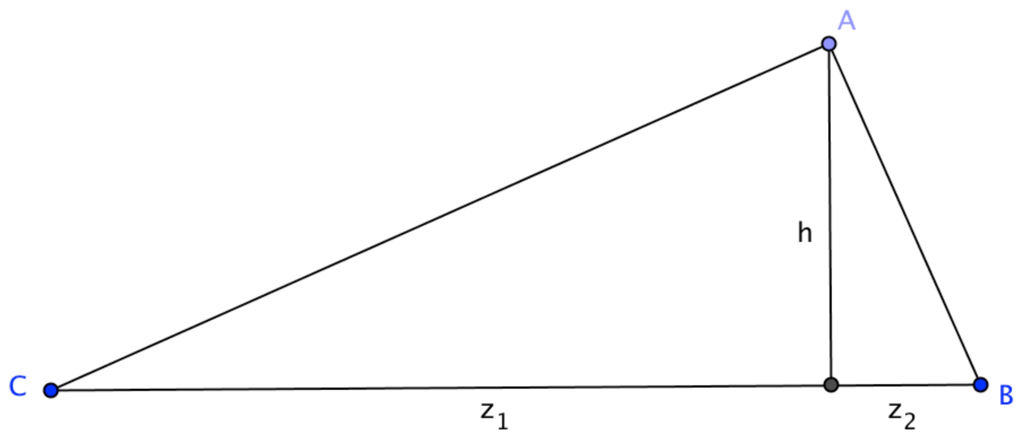
Le nombre de tirages possibles de 2 espadrilles est $\frac{n(n-1)}{2}$ si on ne tient pas compte de l'ordre. Le nombre de tirages possibles d'une espadrille droite non trouée combinée avec une espadrille gauche non trouée est $\frac{n}{4}\times\frac{n}{4}$,

d'où l'équation $\dfrac{\frac{n}{4}\times\frac{n}{4}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{2}{15}\Leftrightarrow\dfrac{n}{8(n-1)}=\dfrac{2}{15}\Leftrightarrow 15n=16(n-1)\Leftrightarrow n=16$

**exercice 7**

Si on fait tourner le triangle autour de l'axe (AC), on engendre un cône de hauteur x = AC et de rayon y = AB , donc de volume $\frac{1}{3}\pi xy^2 = 2200$

Si on fait tourner le cône autour de l'axe (AB) , on engendre un cône de hauteur y = AB et de rayon x = AC , donc de volume $\frac{1}{3}\pi x^2 y = 4960$




Si on fait tourner le cône autour de l'axe (BC), on engendre deux cônes , l'un de hauteur $z_1$ et de rayon h (hauteur issue de A) , donc de volume $\frac{1}{3}\pi h^2 z_1$ ,

et l'autre de volume $\frac{1}{3}\pi h^2 z_2$, ce qui donne un volume total de $\frac{1}{3}\pi h^2 z$ ($z = z_1 + z_2 = BC$)

On a d'autre par les relations reliant x,y,z et h
Avec Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$
Avec l'aire du triangle : $hz = xy$

Le rapport des deux premiers volumes donne $x = \frac{124}{55} y$

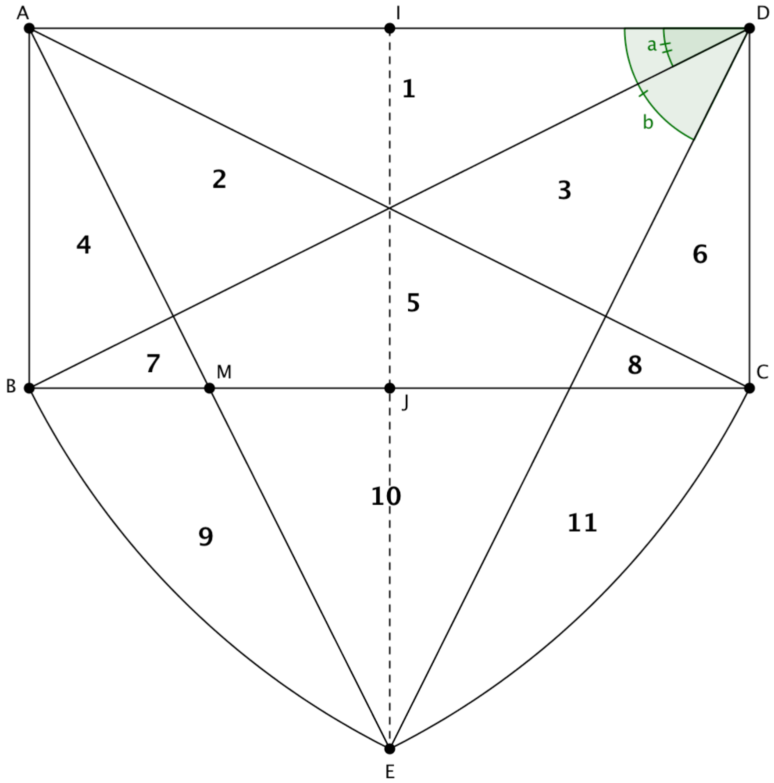
Le volume cherché est $V = \frac{\pi}{3} h^2 z = \frac{\pi}{3} \frac{x^2 y^2}{z}$ en utilisant $hz = xy$

Puis on remplace x par $\frac{124}{55} y$ et z par $\sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui donne

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{\left(\frac{124}{55}\right)^2 y^4}{\sqrt{\left(\left(\frac{124}{55}\right)^2 + 1\right) y^2}} = \frac{\frac{\pi}{3}\left(\frac{124}{55}\right)^2 y^3}{\sqrt{\left(\frac{124}{55}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{124}{55} \times 2200}{\sqrt{\frac{124^2 + 55^2}{55^2}}} = \frac{2200 \times 124}{\sqrt{18401}} \approx 2011$$

On a simplifié en reconnaissant au numérateur $2200 = \frac{1}{3}\pi xy^2 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{124}{55}\right) y^3$

**exercice 8**




**remarques :**

Les triangles DIE et ADB sont de façon évidente isométriques.
En effet DI = AB et DE = DB, donc avec Pythagore, on montre facilement que DA = IE.
Par conséquent , M est le milieu de [BJ] et les triangles ABM et EJM sont également isométriques , et on a une symétrie d'axe (IE)

On a découpé en 11 zones.
aire (secteur(ACE)) = aire(2) + aire(5) + aire(8) + aire(10) + aire(11)
aire (secteur(DBE)) = aire(3) + aire(5) + aire(10) + aire(7) + aire(9)
aire(5) = aire(1) – aire(7) – aire(8) et aire(10) = aire(7) + aire(4) + aire(6) + aire(8)
donc aire(5) + aire(10) = aire(1) + aire(4) + aire(6)

donc aire (secteur(ACE)) = aire(2) + aire(1) + aire(4) + aire(8) + aire(6) + aire(11)
et on garde aire (secteur(DBE)) = aire(3) + aire(5) + aire(10) + aire(7) + aire(9)

On s'aperçoit que la somme des deux aires des deux secteurs donne la somme des aires des 11 zones exactement, donc l'aire du fanion.

L'aire du fanion est donc le double de l'aire du secteur (BDE). L'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle $\alpha$ , donc Aire(secteur) = $\pi \times DB^2 \times \dfrac{\alpha}{360}$

et aire(fanion) = $\pi \times (25^2 + 50^2)\ \dfrac{\alpha}{180}$

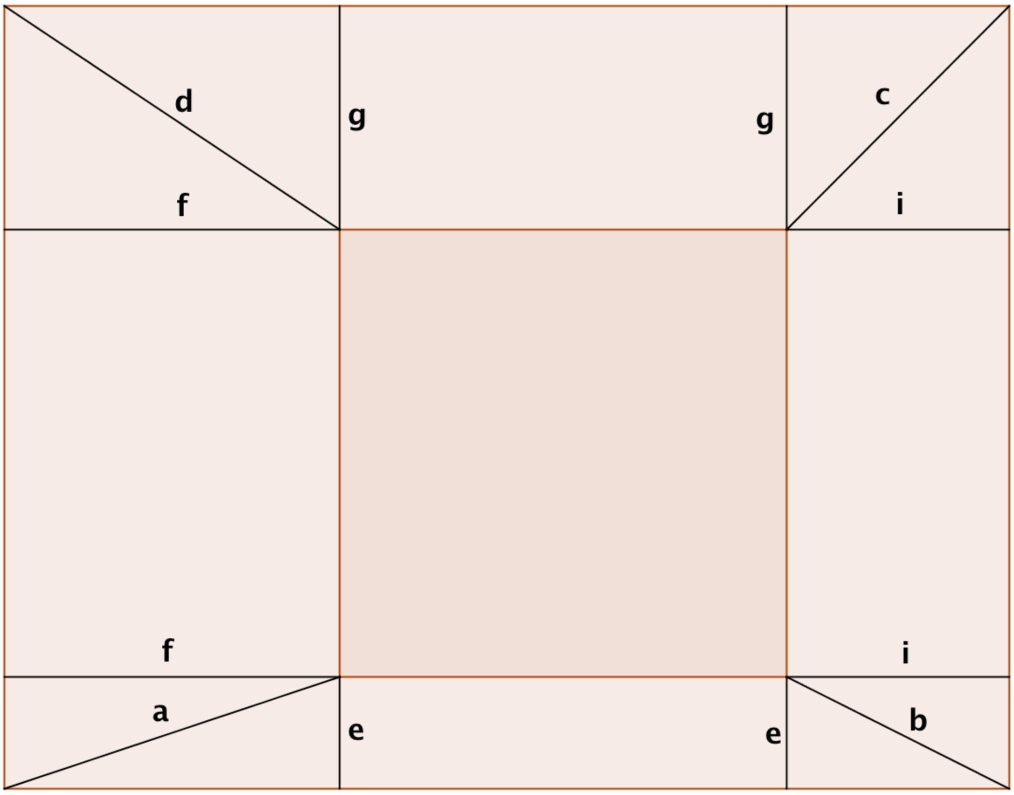
$\alpha = b - a$ , donc $\cos\alpha = \cos b \cos a + \sin b \sin a = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{5} \times \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{4}{5}$

soit $\alpha \approx 36{,}87°$ , puis aire(fanion) $\approx 2011$ cm$^2$

**exercice 9**

Les côtés du carrés étant parallèles à ceux de la base (non forcément carrée) , les deux plans sont parallèles et on peut appeler h la hauteur du solide comme étant la distance entre les deux bases.

Il fallait utiliser la vue de dessus et utiliser Pythagore .




Avec les données de l'énoncé , en appelant x la longueur cherchée

$a^2 + h^2 = 25^2$ avec $a^2 = e^2 + f^2$ , donc $e^2 + f^2 + h^2 = 25^2$ (1)

De même , on obtient $e^2 + i^2 + h^2 = 23^2$ (2)

$g^2 + i^2 + h^2 = 29{,}2^2$ (3)

$g^2 + f^2 + h^2 = x^2$ (4)

(1) – (2) donne $f^2 – i^2 = 25^2 - 23^2$

(3) – (4) donne $f^2 – i^2 = x^2 – 29{,}2$ , donc $x^2 = 29{,}2^2 + 25^2 – 23^2 = 948{,}64$ , donc x = 30,8.