Devoir de mathématiques n°8

EXERCICE 1:

Etudier la parité des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; c) $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

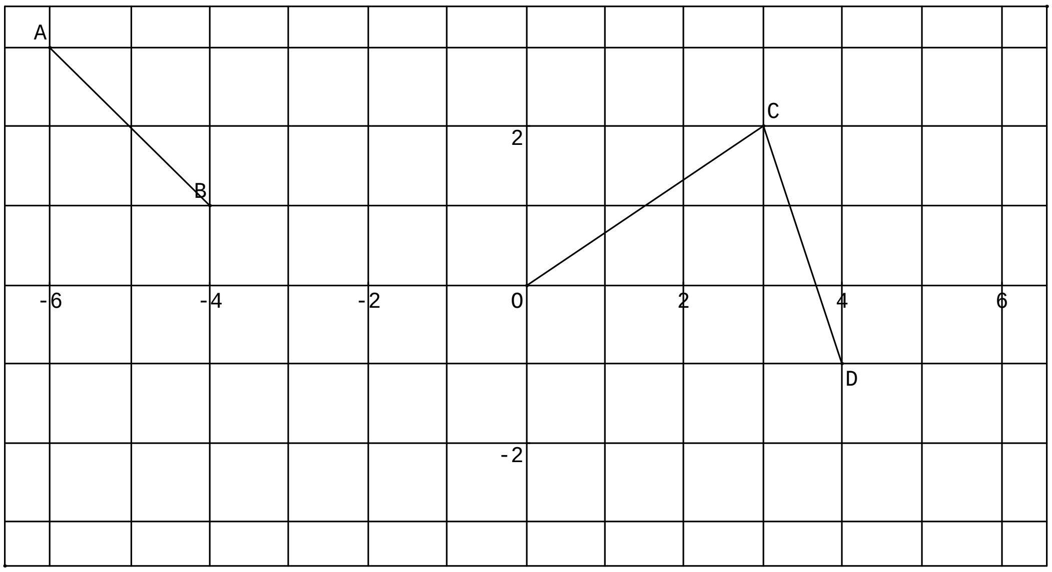
$x \longmapsto x^2 - 7$ $\qquad x \longmapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$ $\qquad x \longmapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$

EXERCICE 2 :

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur [– 6 ; 6] est partiellement représentée ci-contre.

Sachant que f est impaire, compléter le tracé de C_f en justifiant la méthode.

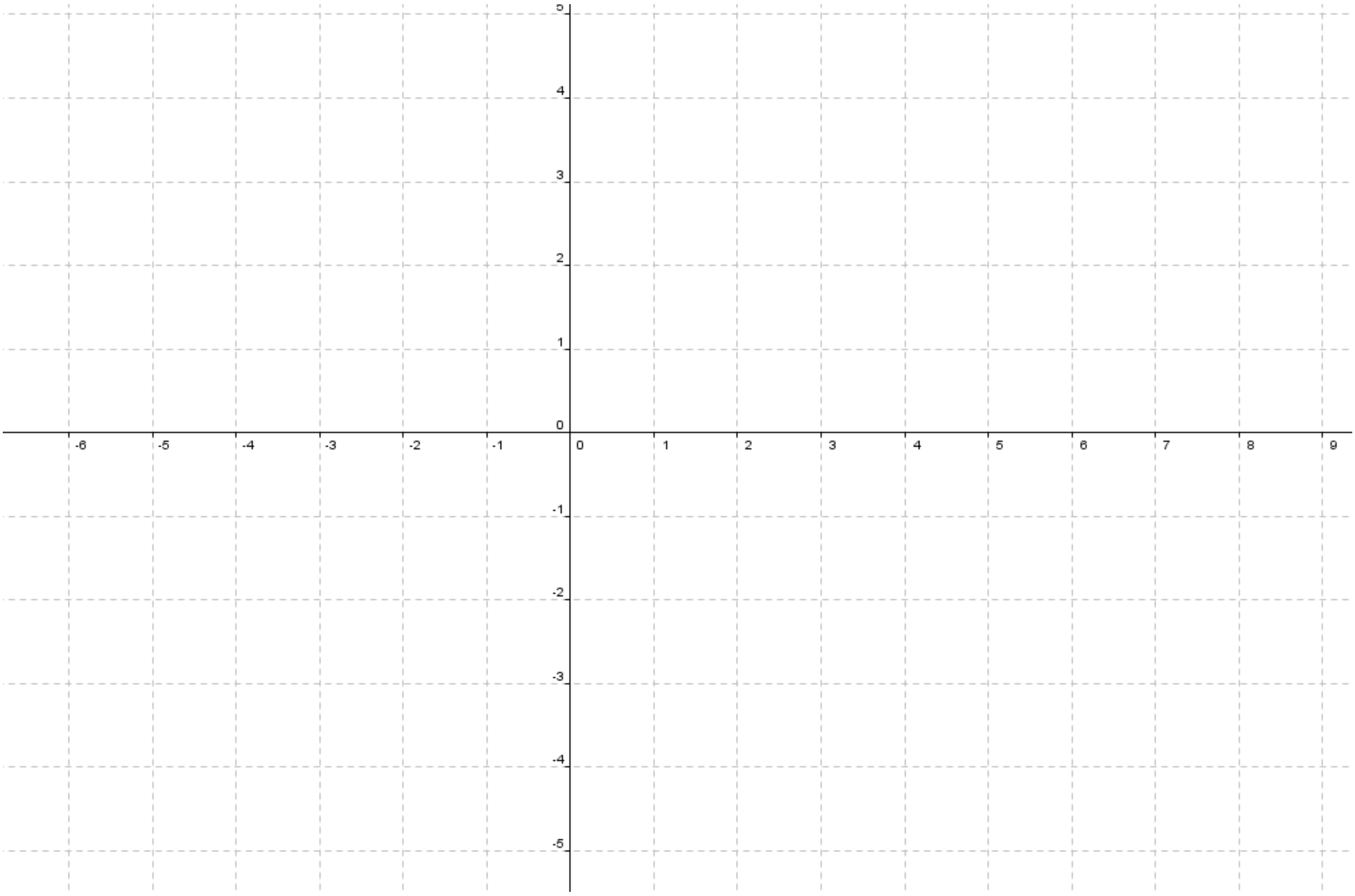
Donner le tableau de variation de f.



EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$.
2. Montrer que f admet un maximum qu'on précisera.
3. Etudier les variations de f sur $]-\infty ; 2]$ et sur $[2 ; +\infty[$.
   Dresser le tableau de variation de f.
4. Résoudre $f(x) \leq -1$.
5. Représenter graphiquement la fonction ci-dessous.
   On fera un tableau de valeurs entre – 1 et 5.
6. Représenter sur le même graphique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x + 2$.
7. Résoudre par le calcul $f(x) < g(x)$.



EXERCICE 4 :

Soit g la fonction définie sur]1 ; 5[par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 12x - 11}{-x^2 + 6x - 5}$.

1.a) Montrer que, pour tout $x \in$]1 ; 5[, $f(x) = 2 - \dfrac{1}{4 - (x-3)^2}$.

b) Factoriser $4 - (x-3)^2$.

2. Justifier que f admet un maximum de $\dfrac{7}{4}$ sur]1 ; 5[en une valeur qu'on précisera.

3. Etudier les variations de f sur]1 ; 3] et sur[3 ; 5[, dresser et le tableau de variation de f et retrouver le résultat précédent.

Corrigé du devoir n°8

EXERCICE 1 :

Dans chaque cas le domaine de définition est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ ou pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$.

a) $f(1) = 5$ et $f(-1) = 5$.

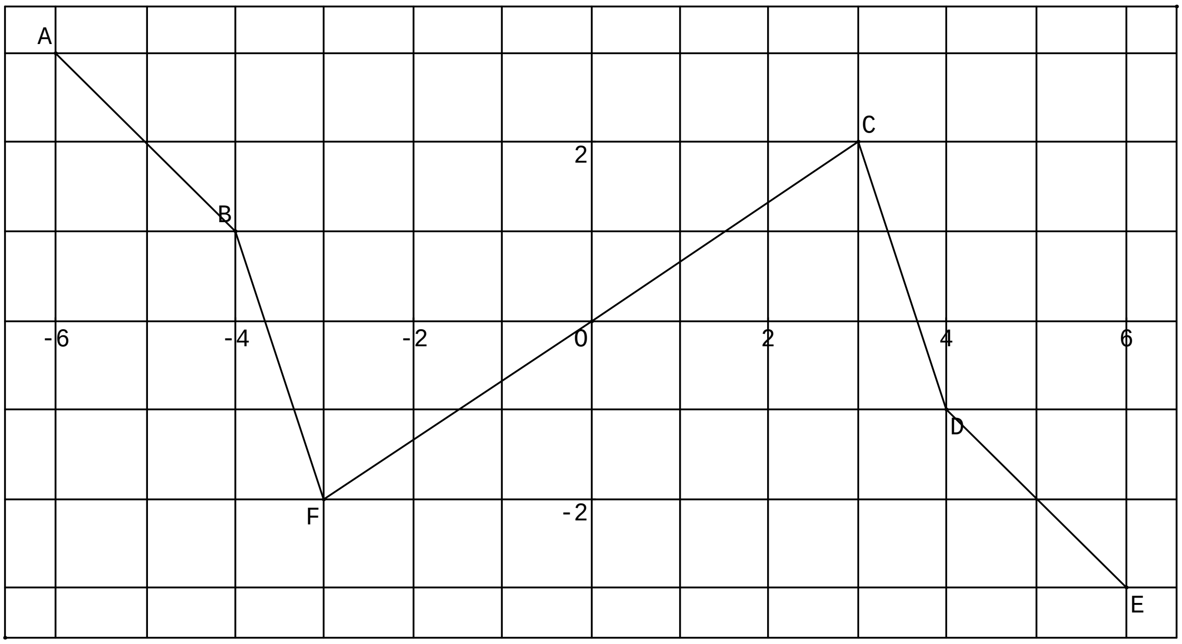
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$, donc f est paire.

b) $g(1) = \dfrac{1}{2}$ et $g(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{-x}{1 + (-x)^2} = -\dfrac{x}{1 + x^2} = -g(x)$, donc g est impaire.

c) $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$, donc h n'est ni paire, ni impaire.

EXERCICE 2 :



Car, puisque f est impaire, elle admet O comme centre de symétrie.

x	-6		-3		3		6
f	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

EXERCICE 3 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-(x-2)^2 + 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 3 = -x^2 + 4x - 4 + 3 = -x^2 + 4x - 1 = f(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$, donc $-(x-2)^2 \leq 0$, d'où $-(x-2)^2 + 3 \leq 3$, soit $f(x) \leq 3$.

   $f(x) = 3$ si, et seulement si, $-(x-2)^2 + 3 = 3$
   si, et seulement si, $-(x-2)^2 = 0$
   si, et seulement si, $(x-2)^2 = 0$
   si, et seulement si, $x - 2 = 0$
   si, et seulement si, $x = 2$, donc f admet un maximum de 3 en 2.

3. Pour tout $x_1, x_2 \in \,]-\infty\,;\,2]$ tels que : $x_1 < x_2 \leq 2$, on a $x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0$,
   d'où $(x_1-2)^2 > (x_2-2)^2 \geq 0$,
   $-(x_1-2)^2 < -(x_2-2)^2 \leq 0$,
   $-(x_1-2)^2 + 3 < -(x_2-2)^2 + 3 \leq 3$,
   $f(x_1) < f(x_2) \leq 3$,

   f conserve l'ordre, donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,2]$.

   Pour tout $x_1, x_2 \in [2\,;\,+\infty[$ tels que : $2 \leq x_1 < x_2$, on a $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$,
   d'où $0 \leq (x_1-2)^2 < (x_2-2)^2$,
   $0 \geq -(x_1-2)^2 > -(x_2-2)^2$,
   $3 \geq -(x_1-2)^2 + 3 > -(x_2-2)^2 + 3$,
   $3 \geq f(x_1) > f(x_2)$,

   f change l'ordre, donc f est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

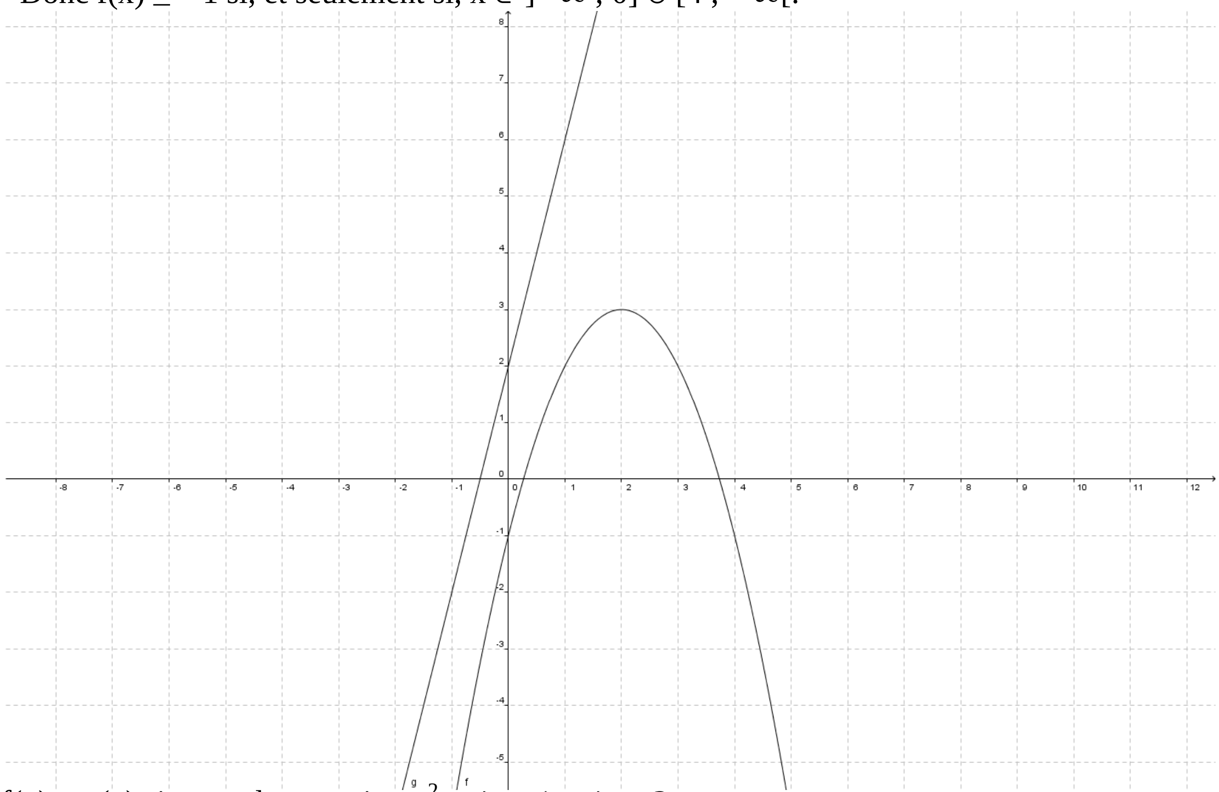
x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

4 . $f(x) \leq -1$ si, et seulement si, $-x^2 + 4x - 1 \leq -1$
si, et seulement si, $-x^2 + 4x \leq 0$
si, et seulement si, $x(-x+4) \leq 0$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(-x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $f(x) \leq -1$ si, et seulement si, $x \in \,]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[$.

5.



7. $f(x) < g(x)$ si, et seulement si, $-x^2 + 4x - 1 < 4x + 2$
si, et seulement si, $-x^2 - 3 < 0$, ce qui est toujours vrai, donc $f(x) < g(x)$ est toujours vrai.

EXERCICE 4 :

1.a) Pour tout $x \in \,]1\,;5[$, $2 - \dfrac{1}{4-(x-3)^2} = \dfrac{2\times[4-(x-3)^2]-1}{4-(x-3)^2} = \dfrac{2[4-(x^2-6x+9)]-1}{4-(x^2-6x+9)} = \dfrac{-2x^2+12x-11}{-x^2+6x-5} = f(x)$.

b) Pour tout $x \in \,]1\,;5[$, $4-(x-3)^2 = [2-(x-3)][2+(x-3)] = (-x+5)(x-1)$.

2. Pour tout $x \in \,]1\,;5[$, $f(x) \leq \dfrac{7}{4}$ si, et seulement si, $2 - \dfrac{1}{4-(x-3)^2} - \dfrac{7}{4} \leq 0$

si, et seulement si, $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4-(x-3)^2} \leq 0$

si, et seulement si, $\dfrac{4-(x-3)^2-4}{4[4-(x-3)^2]} \leq 0$

si, et seulement si, $\dfrac{-(x-3)^2}{4(-x+5)(x-1)} \leq 0$.

x	$-\infty$	1		3		5	$+\infty$
$-(x-3)^2$	+	|	+	0	+	|	+
$-x+5$	+	|	+	|	+	0	−
$x-1$	−	0	+	|	+	|	+
$\dfrac{-(x-3)^2}{4(-x+5)(x-1)}$	−	‖	+	0	+	‖	−

donc pour tout $x \in \,]1\,;5[$, $f(x) \leq \dfrac{7}{4}$ et $f(3) = \dfrac{7}{4}$, donc g admet un maximum de $\dfrac{7}{4}$ en 3.

3. Pour tout $x_1, x_2 \in \,]1\,;3]$ tels que : $1 < x_1 < x_2 \leq 3$, on a $-2 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \leq 0$

$$4 > (x_1-3)^2 > (x_2-3)^2 \geq 0$$
$$-4 < -(x_1-3)^2 < -(x_2-3)^2 \leq 0$$
$$0 < 4-(x_1-3)^2 < 4-(x_2-3)^2 \leq 4$$
$$\frac{1}{4-(x_1-3)^2} > \frac{1}{4-(x_2-3)^2} \geq \frac{1}{4}$$
$$-\frac{1}{4-(x_1-3)^2} < -\frac{1}{4-(x_2-3)^2} \leq -\frac{1}{4}$$
$$2-\frac{1}{4-(x_1-3)^2} < 2-\frac{1}{4-(x_2-3)^2} \leq \frac{7}{4},$$

donc $f(x_1) < f(x_2) \leq \frac{7}{4}$, f est strictement croissante sur]1 ; 3].

Pour tout $x_1, x_2 \in [3\,;5[$ tels que : $5 > x_1 > x_2 \geq 3$, on a $2 > x_1 - 3 > x_2 - 3 \geq 0$

$$4 > (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \geq 0$$

$$-4 < -(x_1 - 3)^2 < -(x_2 - 3)^2 \leq 0$$

$$0 < 4 - (x_1 - 3)^2 < 4 - (x_2 - 3)^2 \leq 4$$

$$\frac{1}{4 - (x_1 - 3)^2} > \frac{1}{4 - (x_2 - 3)^2} \geq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4 - (x_1 - 3)^2} < -\frac{1}{4 - (x_2 - 3)^2} \leq -\frac{1}{4}$$

$$2 - \frac{1}{4 - (x_1 - 3)^2} < 2 - \frac{1}{4 - (x_2 - 3)^2} \leq \frac{7}{4},$$

donc $f(x_1) < f(x_2) \leq \frac{7}{4}$, f est strictement décroissante sur]1 ; 3].

On a donc :

x	1		3		5
f	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	$+\infty\ \Vert$

et on retrouve bien le résultat précédent.