Limites et continuité

Si f est continue en a , alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ et f continue en L , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(L)$

exemple 1

θ est un réel tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2 en fonction de θ
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Indications

- *pour 1) , utiliser la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$*
- *pour 3) , déterminer la limite de la suite $\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$*
- *utiliser la continuité de cos en 0 , c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$*
- *conclure sur la limite de (u_n)*

Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$
Si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \\ \text{f est continue en L} \end{cases}$ alors L est solution de l'équation f(x) = x

exemple 2

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 4
2. En déduire qu'elle est monotone .
3. Quelle est la seule limite L envisageable pour la suite (u_n) ?
4. En posant $v_n = u_n - L$, confirmer la conjecture de la question 3

Indications

- *pour 2) calculer $U_{n+1} - U_n$ et déterminer son signe sachant que $U_n \leq 4$, pour tout n*
- *A l'aide de la continuité de la fonction $f : x \to \frac{1}{4}x + 3$, déterminer l'équation que doit vérifier L et résoudre cette équation*
- *Montrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire u_n en fonction de n*

exemple 3

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -1 - u_n^2 \end{cases}$. Montrer que (u_n) diverge

Indications

- *en supposant que (u_n) converge vers L , et en utilisant la continuité de la fonction : $x \to -1 - x^2$, indiquer l'équation que doit vérifier L*
- *résoudre cette équation*
- *conclure*

exercice

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-u_n}{2}} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout naturel n , $u_n \in [-1\,;1]$

2) Déterminer le réel α_0 de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_0 = \sin(\alpha_0)$

3) Soit (α_n) la suite définie par $\alpha_{n+1} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha_n}{2}$

Montrer par récurrence que pour tout naturel n , $u_n = \sin(\alpha_n)$

4) On considère la suite (β_n) définie par $\beta_n = \alpha_n - \dfrac{\pi}{6}$

a) Démontrer que cette suite est géométrique et en déduire α_n en fonction de n

b) Déterminer la limite de la suite (α_n) , puis celle de (u_n)