méthodes de calcul sur les limites de fonctions

Indétermination du type $\frac{0}{0}$ en x_0 réel

1) Si P et Q sont deux polynômes tels que $P(x_0) = Q(x_0)$ alors pour calculer $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, on factorise P et Q par $x - x_0$ et on simplifie $\frac{P}{Q}$ puis on recalcule la limite
2) On écrit la fractions sous la forme $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ et on utilise $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{2-3}{2\times 2+1} = -\frac{1}{5}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

Les 2 méthodes sont parfois possibles

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$?

$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ donc $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4}$ donc $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \left(\sqrt{x}\right)'(4) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Indétermination $+\infty + -\infty$

On factorise l'expression par le terme qui semble imposer sa limite

$\lim_{x \to 0+} \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2}(3x - 5) = -\infty$ car $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0+} 3x - 5 = -5$

$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 5 = \lim_{x \to +\infty} x^3(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} = 2$

Indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme qui semble imposer sa limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2})}{x^2(2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Appliquer le théorème sur les composées de fonctions

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$

$x^2 - x + 1 = x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$

donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$

et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par composée $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$

Autres exemples

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$ 2. $\lim_{x\to+\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$

limite des suites géométriques

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$	**si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$**

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n \end{cases}$ suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$, donc de limite nulle

Exemple 1 Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n + 5^n}{4^n - 2^n}$

Indications

- *factoriser le numérateur par 5^n et le dénominateur par 4^n*
- *faire apparaître des termes du type q^n*
- *En déduire la limite de la suite*

Exemple 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$

a. On pose pour tout entier n , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b. Déterminer la limite de (u_n)

Indications

- *Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis en fonction de u_n , puis en fonction de v_n et en déduire que (v_n) est géométrique*
- *Déterminer la limite de la suite (v_n)*
- *Exprimer u_n en fonction de v_n (produit en croix)*
- *En déduire la limite de la suite (u_n)*