méthodes sur les suites arithmétiques et géométriques

montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique
On montre que $u_{n+1} - u_n$ est une constante indépendante de n
On reconnaît que u_n est de la forme an + b

$u_n = 5(n + 2)^2 - 5n^2$ définit une suite arithmétique
(Ne pas hésiter à calculer les premiers termes)
$u_n = 5(n^2 + 4n + 5) - 5n^2 = 20n + 25$
$u_{n+1} - u_n = 20(n + 1) + 25 - 20n - 25 = 20$
donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 20

montrer qu'une suite (u_n) n'est pas arithmétique
On calcule u_0,u_1,u_2 et on vérifie que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$
Si par malchance , il y a égalité on calcule u_3 puis $u_3 - u_2$

$u_n = n^2 + 1$
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$ donc $u_2 - u_1 = 3 \neq u_1 - u_0 = 1$
donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique

montrer qu'une suite (u_n) est géométrique
On montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante indépendante de n
On reconnaît que u_n est de la forme $b \times a^n$

$u_n = 3^{n+2} \times \frac{5}{7^{n-1}}$, $u_{n+1} = 3^{n+3} \times \frac{5}{7^n}$

$$\text{donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+3} \times \frac{5}{7^n}}{3^{n+2} \times \frac{5}{7^{n-1}}} = \frac{\frac{5 \times 3^{n+3}}{7^n}}{\frac{5 \times 3^{n+2}}{7^{n-1}}} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{7^n} \times \frac{7^{n-1}}{5 \times 3^{n+2}} = \frac{3}{7}$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{7}$

montrer qu'une suite (u_n) n'est pas géométrique
On calcule $u_0;u_1;u_2$ et on vérifie que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$
Si par malchance , il y a égalité on calcule u_3 puis $\frac{u_3}{u_2}$

$u_n = n^2 + 1$
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$ donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2} \neq \frac{u_1}{u_0} = 2$

déterminer l'expression d'une suite arithmétique (u_n) connaissant pour m et p entiers , u_m et u_p

On utilise la relation $u_m = u_p + (m - p)r$ pour en déduire $r = \dfrac{u_m - u_p}{m - p}$

Ensuite on écrit $u_n = u_p + (n - p)r$

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 = 16$ et $u_7 = -9$

$u_7 = u_2 + 5r$, donc $r = \dfrac{-9 - 16}{5} = -5$

donc $u_n = u_2 - 5(n - 2) = 16 - 5n + 10 = 26 - 5n$

déterminer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1) = \begin{pmatrix}\text{moyenne}\\ \text{des termes}\\ \text{extrêmes}\end{pmatrix} \times \text{Nombre de termes}$$

$6 + 4 + 2 + 0 - 2 - 4 \dots\dots - 2012$

On choisit de poser $u_0 = 6$ et $u_n = -2012$

(u_n) est une suite arithmétique de raison -2 , donc $u_n = 6 - 2n$

$-2012 = 6 - 2n \Leftrightarrow n = 1009$, donc $u_{1009} = -2012$

la somme s'écrit $u_0 + u_1 + \dots.. + u_{1009} = 1010 \times \dfrac{6 - 2012}{2}$

déterminer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{q - 1} = u_0\,\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{1}{81} - 27}{\frac{1}{3} - 1}$$

déterminer l'expression d'une suite (u_n) à l'aide d'une suite arithmétique auxiliaire (v_n)

- on déterminer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}
- on remplace u_{n+1} pour faire apparaître u_n
- on remplace u_n pour faire apparaître v_n

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}$ On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Montrer que (v_n) est une suite arithmétique . En déduire u_n en fonction de n

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 1}{3u_n - 2 - 2u_n + 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = 2$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$

$u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{1}{2n + 1} + 1 = \dfrac{2n + 2}{2n + 1}$

déterminer l'expression d'une suite (u_n) à l'aide d'une suite géométrique auxiliaire (v_n)

- on déterminer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}
- on remplace u_{n+1} pour faire apparaître u_n
- on remplace u_n pour faire apparaître v_n

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

Soit $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. En déduire u_n en fonction de n

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = 3v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et $v_n = v_0 \times 3^n = 2 \times 3^n$

$u_n = v_n + 1 = 1 + 2\times3^n$